第 1 講　いろいろな関数

PART1　分数関数

要点整理と公式

要点 ①　分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

「分数関数」･･･ $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{x^2+1}{x-3}$ のように，分数式で表される関数。

定義域は，分母を 0 にする x の値を除く実数全体。

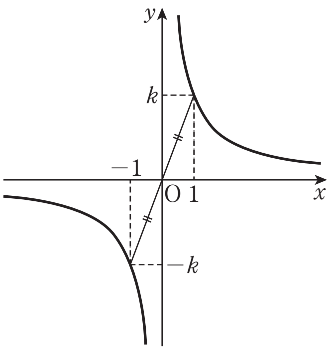
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ ($k\neq 0$) のグラフについて

・グラフは，原点について対称な「　　　　」

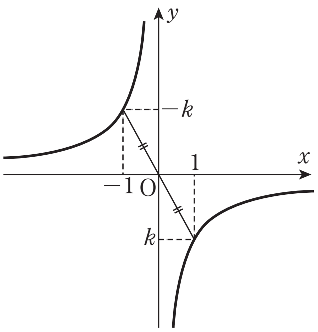
・x 軸と y 軸を「　　　　」とする

・定義域：$x\neq 0$　　　値域：$y\neq 0$

$k>0$ のとき



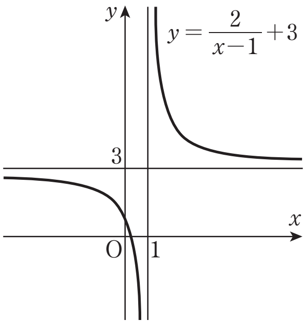
$k<0$ のとき



一般に，関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

(ex) 関数 $y=\dfrac{2}{x-1}+3$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に　，y 軸方向に　だけ平行移動した双曲線であり，漸近線は 2 直線 $x=$　，$y=$　である。

定義域は $x\neq$　　　値域は $y\neq$　である。



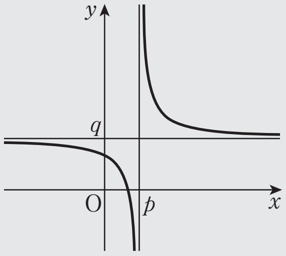
分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

・グラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線

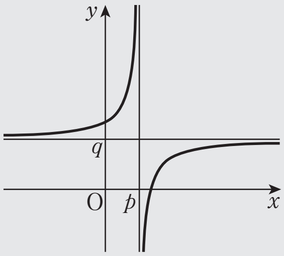
・漸近線は $x=p$，$y=q$

・定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$

$k>0$ のとき



$k<0$ のとき



要点② 分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形することができる。

(ex) 分数関数 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフ

$2x+1$ を $x+1$ で割ると，商は 2 で余りは -1 であるから

$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{\quad(x+1)\qquad}{x+1}=\frac{\quad(x+1)}{x+1}+\frac{\qquad}{x+1}$$

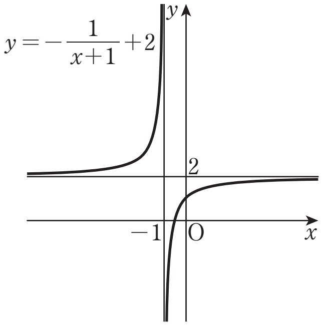
$$=\qquad\frac{\qquad}{x+1}$$

$$=\qquad\frac{\qquad}{x+1}+\qquad$$

```
        2
x+1 )2x+1
     2x+2
       -1
```

よってこの関数のグラフは，$y=$　　　のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。したがって，グラフは右図。

漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=2$



1 (1) 次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

(i) $y=\dfrac{1}{x-1}$　　(ii) $y=-\dfrac{4}{x}+3$

(iii) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$　　(iv) $y=\dfrac{3-2x}{x-2}$

(2)(i) 関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(ii) 不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ を解け。

Point Pickup

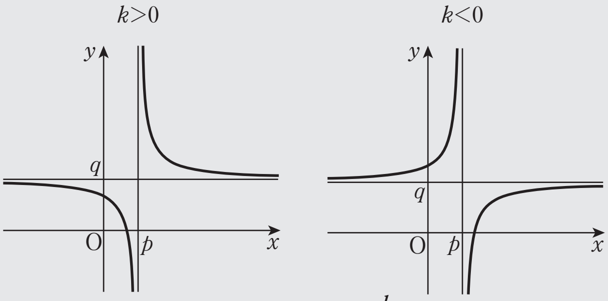
分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを

x 軸方向に

y 軸方向に

だけ平行移動した直角双曲線



漸近線 $x=p$，$y=q$ をかき，点 $(p,\ q)$ を原点に見立てて $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを描く。

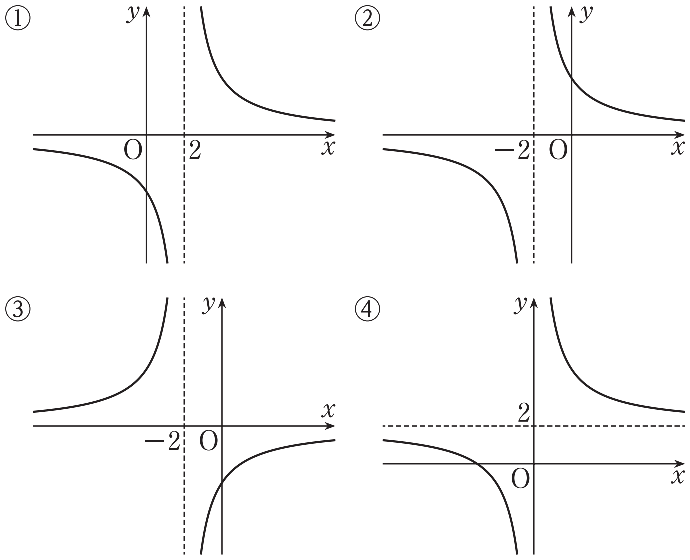
分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

「除法の原理」を用いて，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形し，グラフを描く。

第 1 講　PART1 確認問題

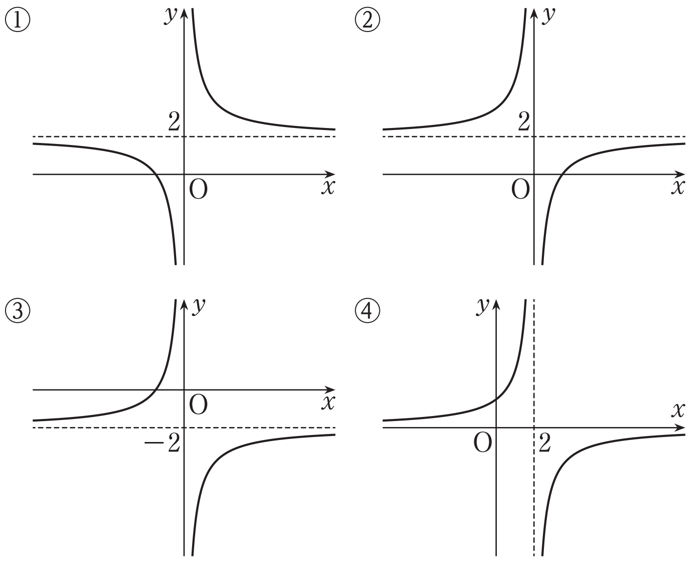
1　関数 $y=\dfrac{6}{x+2}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

ア



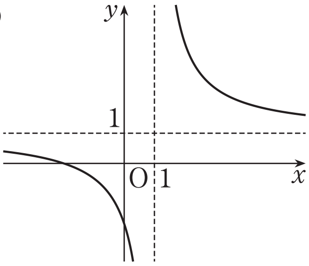
2　関数 $y=-\dfrac{3}{x}+2$ のグラフを, 次の①～④のうちから選べ。

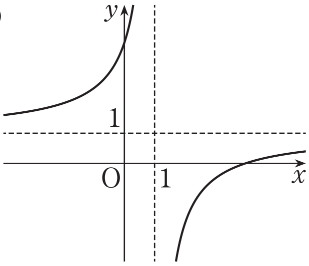
イ

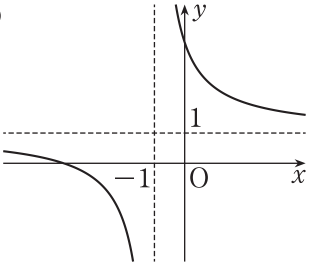


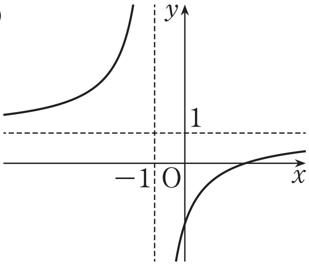
3 関数 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

[ウ]

①


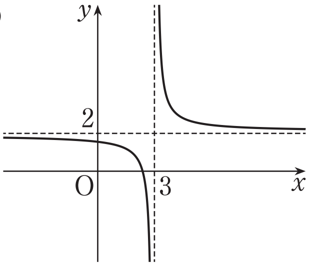
②


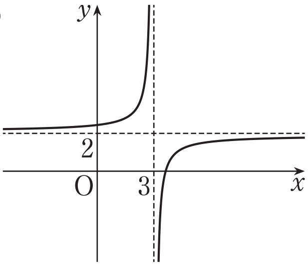
③


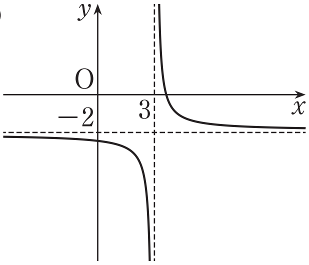
④


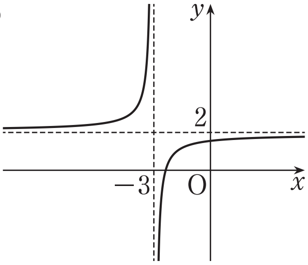
4 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

[エ]

①


②


③


④


5 関数 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフと直線 $y=x+3$ の共有点の x 座標は，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カキ}}$ である。

6 不等式 $\dfrac{3x+5}{x+1}>x+3$ の解は，

$x<\boxed{\text{クケ}}$，$-1<x<\boxed{\text{コ}}$ である。

第 1 講　いろいろな関数

PART1 分数関数

1 (1)　次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

(i)　$y=\dfrac{1}{x-1}$　　(ii)　$y=-\dfrac{4}{x}+3$

(iii)　$y=\dfrac{x-1}{x+3}$　　(iv)　$y=\dfrac{3-2x}{x-2}$

(2)(i)　関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求めよ。

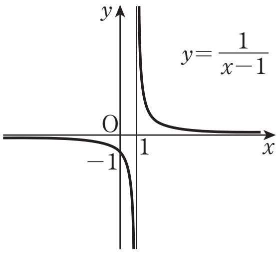
(ii)　不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ を解け。

[解答]

(1)(i)　求めるグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=1$，$y=0$

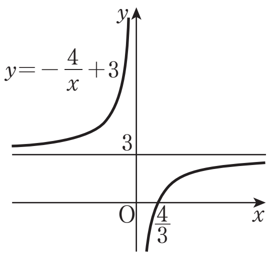
グラフは右図



(ii)　求めるグラフは $y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=0$，$y=3$

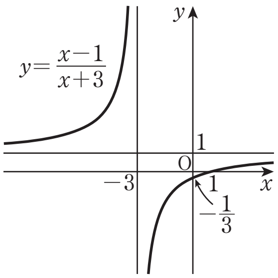
グラフは右図



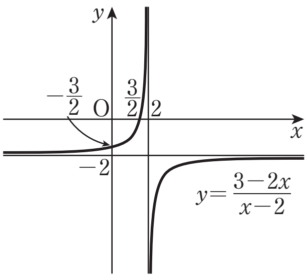
(iii)　$y=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1\cdot(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+1$

よって，求めるグラフは $y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-3$，$y=1$



(iv)　$y=\dfrac{3-2x}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-2$



よって，求めるグラフは $y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを

x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した

直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=2$，$y=-2$

(2)(i)　関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の x 座標は，

方程式 $\dfrac{4x-6}{x-2}=x+1$ の解である。

$4x-6=(x+1)(x-2)$

$x^2-5x+4=0$　　　　よって $x=1$，4

$x=1$ のとき $y=2$　　$x=4$ のとき $y=5$

したがって，求める共有点の座標は　(1，2)，(4，5)

(ii)　不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ ……　①の解は，

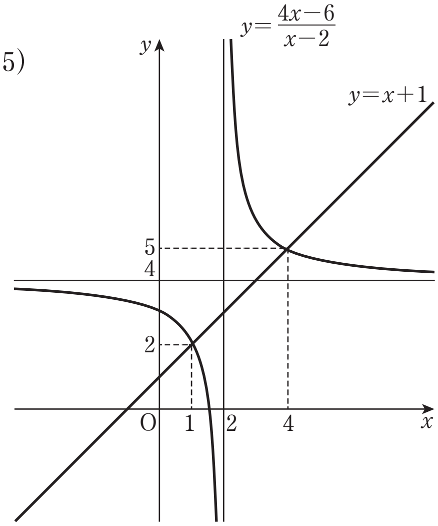
関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフが直線

$y=x+1$ より上側にある x の値の

範囲である。

$y=\dfrac{4x-6}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+4$ のグラフ

および $y=x+1$ のグラフは，(i)より右図。



この図より，不等式①の解は

$x<1$，$2<x<4$

第 1 講　PART1 確認問題 解答

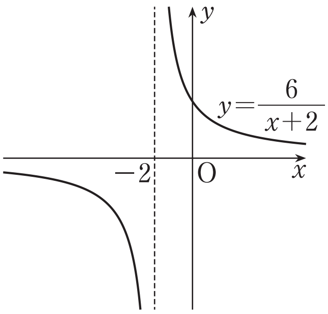
1

[正解] ア：②

[解説]

$y=\dfrac{6}{x+2}$ のグラフは，$y=\dfrac{6}{x}$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-2$，$y=0$ [A]



[A]　$y=\dfrac{k}{x-p}$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=0$

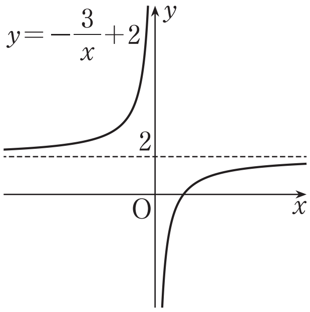
2

[正解] イ：②

[解説]

$y=-\dfrac{3}{x}+2$ のグラフは，$y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=0$，$y=2$ [B]



[B]　$y=\dfrac{k}{x}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=0$，$y=q$

3 **[正解]** ウ：④

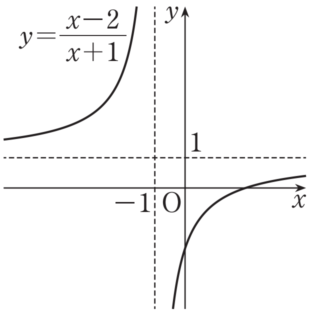
[解説]

$$y=\frac{x-2}{x+1}=\frac{(x+1)-3}{x+1}$$

$$=-\frac{3}{x+1}+1 \quad \text{[C]}$$

このグラフは，$y=-\frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=1$ [D]



[C]　分数関数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ の式を $y=\frac{k}{x-p}+q$ の形に変形する。

[D]　$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=q$

4 **[正解]** エ：①

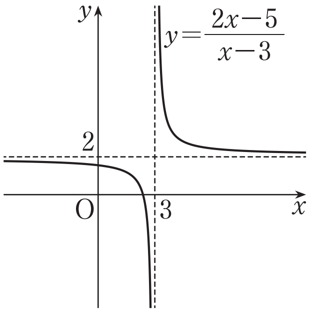
[解説]

$$y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}$$

$$=\frac{1}{x-3}+2 \quad \text{[E]}$$

このグラフは, $y=\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=3$，$y=2$ [F]



[E]　分数関数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ の式を $y=\frac{k}{x-p}+q$ の形に変形する。

[F]　$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=q$

5　**[正解]** オ：1，カキ：-2

[解説]

$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフと直線 $y=x+3$ の共有点

の x 座標は，方程式

$$\frac{3x+5}{x+1}=x+3 \quad \text{[G]}$$

の解である。これを解くと，

$$3x+5=(x+3)(x+1)$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2,\ 1$$

これらは $x \neq -1$ を満たす。

よって，共有点の x 座標は，**1，-2**

[G]　2 つの式から y を消去して，x の方程式をつくる。

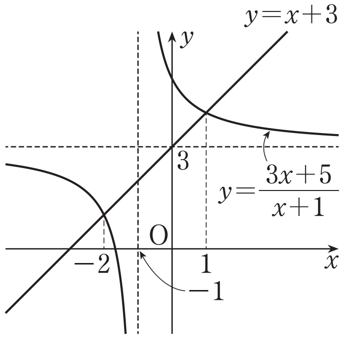
6 **[正解]** **クケ：**-2, **コ：**1

[解説]

不等式 $\dfrac{3x+5}{x+1}>x+3$ の解は，$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフが直線 $y=x+3$ より上側にある x の値の範囲である。[H]

$$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$$

のグラフおよび $y=x+3$ のグラフは，次の図のようになる。



よって，グラフより，

$$\frac{3x+5}{x+1}>x+3$$

$$\boldsymbol{x<-2,\ \ -1<x<1}$$ [I]

[H]　2つのグラフの上下関係を利用して解く。

[I]　$x \neq -1$ であることに注意する。